チューターの富永です。今回も東大の過去問を見ていきますが、これまで紹介した問題とは毛色の違う一問です。

1999 年 第六問

$$\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx > 8$$

を示せ。ただし、$\pi = 3.14\cdots$ は円周率、$e = 2.71\cdots$ は自然対数の底である。

問題としてはそこまで難しくありません。普通に不定積分ができるので計算してみると

$$\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx = \frac{2}{5}(e^{\pi} - 1)$$

となるので、示したい不等式は式変形をすれば

$$e^{\pi} > 21$$

と同値になることがわかります。
$y = e^x$ は x で 2 回微分した値が常に正なので、どの点で接線を引いても接線よりも上側に曲線があります。特に、

$$e^{\pi} > e^3\pi - 2e^3$$

です。この式の右辺は、$x = 3$ での $y = e^x$ での接線が $y = e^3x - 2e^3$ であることから導出しました。いま、

$$e^3\pi - 2e^3 = e^3(\pi - 2) > (2.71)^3 \cdot (3.14 - 2) > 22$$

であるので、上の不等式が示されました。最後の手計算は大変ですが、接線で関数の値を一次近似することは高校の数学の教科書にも載っていますし、この問題を解くアイデアには困らないと思います。
ところで e^{π} とはどういう数なのでしょう。e^3 はすぐにわかります。e が何であれ、e を 3 回かけた数のことです。e^{π} は少なくとも e^3 よりは大きいはずなので、先ほどの問題を解く際に e^3 で 21 を上から抑えられないだろうかと少し思うのですが、残念ながらそれだとこの問題を解くのには十分ではありません。(計算してみてください)
じゃあ $e^{3.1}$ ではどうでしょう? 定義はすぐにわかります。10 乗したら e^{31} になるような数です。ですがそのような数を実際に問題文の情報だけで手計算することは至難の業です。そこでこの問題を解く際には一次近似、すなわち直線で e^x という関数を近似したのです。

しかし、e^π はどういう数だったでしょうか? もっと言うなら、ある数の無理数乗の定義は高校の教科書に載っていたでしょうか?

明示的に定義が書かれている教科書はそう多くないと思います。では、どう定義をしたらいいでしょうか。

1 つの答えは、無理数は有理数の極限として書けるので、無理数乗を有理数乗の極限として定義することです。これは高校の教科書の内容の自然な拡張になっていて定義自体は理解しやすいかもしれませんが、無理数乗が実際に実数の値を取る、すなわち極限が収束することを言わなければなりません。証明するのは難しくありませんが、あまりうまい定義ではないとモヤモヤする人もいるのではないでしょうか?(私は受験生のころこの問題を解いたときこのことで非常に悩んだ記憶があります。)

高校の教科書は非常によく書けているものも多いですが、高校の教科書よりも先に進んだ内容をある程度知っていないと先ほどのように少し戸惑ってしまう箇所もあります。そのような場所を無視して理解したつもりでいるよりも、わからないモヤモヤ感をずっと持っておくことの方が大切です。

東大は定義を大切にします。常に受験生が高校の教科書の定義と定理を正しく理解しているかどうかを問うています。有名になりましたが、同じ年はこんな問題も出題しています。

> 1999 年 第一問
>
> (1) 一般角 θ に対して、$\sin\theta$、$\cos\theta$ の定義を述べよ。
>
> (2) (1) で述べた定義に基づき、一般角 α, β に対して
>
> $$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
>
> $$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
>
> を証明せよ。

理学部数学科の推薦入試でも、高校の教科書に書いてある実数の性質を理解しているかを問う質問がされたと聞いています。東大を目指す受験生もそうでない人も、もう一度高校で配られた教科書を”厳密に”(自分にとってすっきりわかって、他人にもスラスラ説明できるまで) 読み直してみるといいと思います。かならず疑問を持つ箇所が出てくると思います。そこをすっきりとわかるようになるまで質問したり調べたりすると、また一段と数学力も上がってくると思います。何か疑問があるのなら連絡していただければ最大限力を貸しますし、世の中にはたくさんのいい本があります。例えば微積分のところで疑問があ

るのなら図書館や大きい書店の理工学コーナーにある有名な微積分の教科書 (解析概論など) を読んでみるのも助けになるのではないかと思います。