チューターの富永です。まず初めに、前回の記事の訂正から入ります:
前回の記事で、「求める m は $2016-m/m$ が偶数となる最小の m」という文章を書きましたが、これは誤りで、正確には「求める m は $2016-m/m$ を既約分数で表したときに分子が偶数となる最小の m」というのが正しい文章です。そこから先の議論は本質的には何も変わらないので、そのまま (適宜修正を入れることで) 読んで頂ければ大丈夫だと思います。

今回の記事は、つい数日前に行われた 2018 年度の問題を少し考えてみたいと思います。

2018 年度 理系 第 2 問

数列 $\{a_n\}_n$ $(n \geq 1)$ を

$$a_n = \frac{{}_{2n+1}C_n}{n!}$$

で定める。
(1)$n \geq 2$ とする。$\frac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\frac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n(\geq 1)$ と分子 q_n を求めよ。
(2)a_n が整数となる $n \geq 1$ を全て求めよ。

(1) は難しくありません。定義より計算すると $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2(2n+1)}{n(n+1)}$ となりますが、$2n+1$ は n と互いに素、$n+1$ とも互いに素です。また、$n(n+1)$ は偶数なので、$\frac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数で表すと $\frac{2n+1}{n(n+1)/2}$ となります。よって、$p_n = n(n+1)/2$、$q_n = 2n+1$ となります。
問題は (2) です。n にいろいろ値を入れて計算してみると、どうも $n=1,2$ の時は整数になるが、それ以外の時は整数にならなさそうな気がしてきます。そこで、$n \geq 3$ では a_n が整数にならないことを示しましょう。

(1) の誘導に従うと、$n \geq 3$ で

$$a_n = \frac{q_n}{p_n} \cdot \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} \cdots \frac{q_3}{p_3} \cdot 5$$

になることがわかります。いま、各 a_n が整数であるためには $q_n \cdot q_{n-1} \cdots q_3 \cdot 5$ が $p_n \cdot p_{n-1} \cdots p_3$ で割り切れないといけませんが、(1) からわかる通り $q_n \cdot q_{n-1} \cdots q_3 \cdot 5$ は奇数の積なので奇数ですが、$p_3 = 6$ で偶数です。したがって、$n \geq 3$ で a_n が整数になったとすると、奇数が偶数で割り切れることになり、矛盾が起きます。したがって、$n \geq 3$ で a_n は整数になりません。

単純に解くならこのようになり、そこまで難しい問題ではありませんでした。実際に試験会場にいた受験生ならきっちりと正答出来ればそれで O.K. なのでそこで通り過ぎたか

もしれませんが、これから受験を控えているみなさんは、ここで止まらずもう少し考えを深めていきましょう。
まず、(2) の別解を考えてみます。a_n を定義通り書き直してみると、

$$a_n = \frac{(2n+1)!}{(n+1)! \cdot (n!)^2}$$

となります。分子は $2n+1$ 個の整数の積ですが、分母は $3n+1$ 個の整数の積なので、数学 3 を履修している理系の皆さんは n が十分大きいと分子よりも分母の方が大きくなりそうだとカンが働くかもしれません。もちろん分子より分母の方が大きければその分数は整数にはならないので、そのような n がどれくらいか考えてみたくなります。

$$(2n+1)! \leq 2(n+1) \cdot 2n \cdot 2n \cdots 2 = 2^{2n+1} \cdot (n+1) \cdot (n!)^2$$

です。一つ目の不等号は、$(2n+1)!$ に現れる数のうち奇数をそれより 1 大きい偶数で置き換えることによって得ました。等号はただ普通に式を整理して書き直しただけです。
これが $(n+1)! \cdot (n!)^2$ よりも小さくなる時を考えてみます。すなわち、$2^{2n+1} \leq n!$ となる n を求めます。
そもそも 2^{2n+1} は n が 1 増えるごとに 4 倍しかされませんが、$n!$ は n が 1 増えるごとに n 倍されるので、$n \geq 4$ を満たすある n で $2^{2n+1} \leq n!$ となっていればそれ以上の n でも帰納的に $2^{2n+1} \leq n!$ となっているはずです。$n = 1$ から両辺の大きさを比べてみると、(計算は結構大変ですが) $n < 10$ で $2^{2n+1} \geq n!$ で、 $n = 10$ で $2^{2n+1} \leq n!$ となります。よって $n \geq 10$ なら a_n は 1 より小さくなるので当然整数にはならず、$n = 1, 2, \cdots, 9$ のうち a_n が整数になるのは実際に計算してみると $n = 1, 2$ の時のみであることがわかります。よって a_n が整数になるのは $n = 1, 2$ の時のみです。

こんな風に、一つの問題も見方を変えれば別解が得られます。一つの問題に複数の別解が付くのはいい問題である証拠です．また、別解を考えるのに加えて問題の背後にある数学を見抜いてみようとすると、数学の問題を解くのがもっと楽しくなります。実際、先ほどの問題だと、a_n という数字はどのような意味を持っているのか (組合せ的にはどのような意味を持つか、テイラー展開した時に係数が a_n となる関数はどのようなものか、など...) ということが気になります。私も考えてはいますが、まだよくわかっていません。
皆さんも、解けた問題に別解が考えられそうだったら別解をつけてみる訓練をしてみたらどうでしょうか。さっきの問題にも、皆さんにならまた別の解き方が見つかるかもしれません。全く違う考え方で解いたよとか、a_n という数字はこういう意味なのではないかとか、何かわかりましたら連絡していただけると嬉しいです。