

今回の記事では、東大の入試問題を題材に東大入試では、より一般的に大学入試の数学では何を求められているかを考えていきたいと思います。第一回目として、次の問題を考えてみましょう。

m を 2015 以下の正の整数とする。 ${}_{2015}C_m$ が偶数となる最小の m を求めよ。

問題文から推察される通り、2015 年に出题されました。

問題文を眺めていても始まらないので、とりあえず $m = 1, 2, 3$ などで計算してみるといいでしょう。実際それで偶数になっているものを見つけられたら嬉しいのですが、残念ながらそうすぐには見つからないと思います。(結構根気があれば見つかりますが...)

そこで、 ${}_{2015}C_m$ を ${}_{2015}C_{m-1}$ などの漸化式で表すことを考えてみます。約数に関する性質ですから、掛け算の形で書けると便利でしょう。

ここで、 C の定義からすぐに思いつく式があります。

$${}_{2015}C_m = {}_{2015}C_{m-1} \cdot \frac{2016 - m}{m}$$

こう書いてみると、 ${}_{2015}C_m$ が偶数となる最小の整数は、 $\frac{2016-m}{m}$ が偶数となる最小の整数に等しいことがわかります。もうここで $m = 1$ から $\frac{2016-m}{m}$ を計算してみて偶数となる最小のものを見つけてもいいのですが、少し考えればもう少し苦勞を減らすことができます。実際、 $\frac{2016-m}{m}$ が偶数となるには、明らかに $2016 - m$ が偶数であることが必要です。つまり、 m が偶数であることが必要になります。したがって、 $m = 2k$ と書いてみます。(もちろん k は正の整数です。)すると、 $\frac{2016-m}{m}$ は $\frac{1008-k}{k}$ に等しいので、今度はこれが偶数になる最小の k を求めたいわけです。ここで、1008 が偶数ですから、先ほどと同じ議論をしたくなります。同じ議論を何度もするのは得策ではありませんから、最初から $m = k \cdot 2^n$ (k は奇数) と表して議論してみればよいだろうという考えに至ります。そこで、

$$\frac{2016 - k \cdot 2^n}{k \cdot 2^n}$$

という式を眺めてみます。この式が偶数になる最小の k, n を見つけたいわけです。いま、 $2016 = 2^5 \cdot 63$ ということに注意します。いま、 $n \leq 4$ だとすると、先ほどの式の分子と分母を 2^n で割ることができそうですが、結果として出てくる分数は (奇数)/(奇数) という形になり、この数が偶数になることは望めません。

そこで、 $n = 5$ の時を考えます。分子と分母を 32 で割ると、この分数は $63 - k/k$ という形になり、これはもちろん $k = 1$ の時に偶数になります。したがって求める整数は $k = 1, n = 5$ の時の m 、すなわち $m = 32$ です。

いかがでしたでしょうか。今の問題は、おそらく受験生の出来も分かれ合否に繋がる難易度の一問だったと思います。しかし、決して突飛な発想を必要とせず、一つ一つ確実に論述を積み上げていけば解けるような問題であることがわかっていただけたと思います。

実際、東大の入試問題は決してエレガントなアイデアを必要とせずとも、一つ一つ問題を整理して思考を進めていけば自然に解けてしまう問題が多く出題されています。また、大問のうちの小問が問題を解くのに必要なアイデアのヒントになっていることも多く、そのような誘導に自然に従えば解ける問題が多いです。ですから、東大を目指す受験生は問題の背景になっている知識や裏技チックなテクニックをやみくもに求めていくのではなく、教科書の内容を深く理解し、教科書にある言葉の定義と公式の導出を大切に、また問題を解くにあたって確実に思考を進める習慣を養っていただきたいと思います。

ただし、エレガントな解き方に出会ったときにはそれを綺麗だと思い、自分のアイデアになるまでその解き方を味わってみることも重要です。実際、先ほどの問題はもっと簡単に解けます。

$$\frac{2016 - m}{m} = \frac{2016}{m} - 1$$

ですから、求めたいのは $\frac{2016}{m}$ が奇数となる最小の m です。

$2016 = 2^5 \cdot 63$ ですから、 $\frac{2016}{m}$ が奇数となる最小の m は 32 であることがすぐにわかります。(先にこっちに気づいた人は、先ほどの解説は冗長で長ったらしいと思いましたか? ごめんなさい!)